UNIDAD IV. LEYES DE SENOS Y COSENOS.

OBJETIVO. El estudiante resolverá problemas leyes de senos y cosenos, teóricos o prácticos de distintos ámbitos, mediante la aplicación las leyes y propiedades de Senos y Cosenos apoyado en un análisis crítico y reflexivo para la solución de triángulos oblicuángulos, en un ambiente escolar que favorezca el desarrolló de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el que se desenvuelve.

4.1 Leyes de Senos y Cosenos.

4.1.1 Ley de Senos.

4.1.2 Ley de Cosenos.

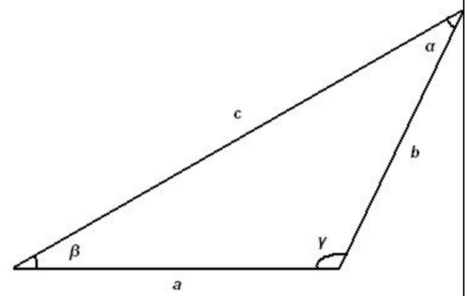
4.1.3. Resolución de triángulos oblicuángulos.

4.1.4. Aplicaciones prácticas.

INTRODUCCIÓN. En la tercera unidad ya trabajaste en resolución de triángulos rectángulo en donde para ello utilizaste herramientas como el Teorema de Pitágoras y las Funciones Trigonométricas. Para el caso de triángulos que no sean rectángulos, tales como los oblicuángulos, se requiere del uso de otros métodos distintos; En esta unidad cubriremos dos métodos para el análisis de estos triángulos oblicuángulo, La Ley de los Senos y La ley de los cosenos. Verás también que estos métodos también se pueden aplicar para la resolución de triángulos rectángulos.

LEY DE SENOS.

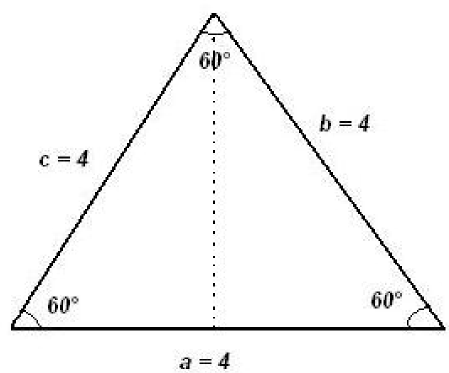
En la figura se presenta un triángulo oblicuángulo de lados a, b y c; Ninguno de los ángulos (α, β, γ) de este triángulo es de 90°, por eso es llamado oblicuángulo.



En todo triángulo, la medida de sus lados y sus ángulos están ligados, relacionados, por un proporción, que queda manifestada por la igualdad siguiente, llamada **Triple Igualdad**:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Observa que cada cociente se compone de **"un lado y su ángulo opuesto"**. Esta expresión indica que, la división entre un lado y el ángulo opuesto a éste es la misma para cada uno de los tres casos del triángulo.



Ejemplo. En un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 unidades, todos sus ángulos son iguales a 60°. De acuerdo a la ley de senos, no hay ninguna duda que se cumple para nuestro triángulo equilátero:

$$\frac{a=4}{sen(60°)} = \frac{b=4}{sen(60°)} = \frac{c=4}{sen(60°)}$$

$$\frac{4}{0.866} = \frac{4}{0.866} = \frac{4}{0.866}$$

NOTA. Veamos cómo esta ley de senos puede extenderse para aplicarse en la resolución de triángulos rectángulos. Para ello tomemos como ejemplo el caso del triángulo equilátero anterior; observemos el siguiente cuadro.

<table>
<tr>
<td>

Ejemplo. Si en el triángulo equilátero anterior trazamos una línea (la punteada) que lo parta en dos partes iguales, obtendríamos el triángulo rectángulo que se muestra en la figura. Apliquemos la ley de senos para encontrar el valor que tomaría la altura de este triángulo, el lado b'; así mostraríamos que la ley de senos se extiende para triángulos rectángulos. Se debe cumplir la igualdad siguiente:

$$\frac{2}{sen(30°)} = \frac{b'}{sen(60)}$$

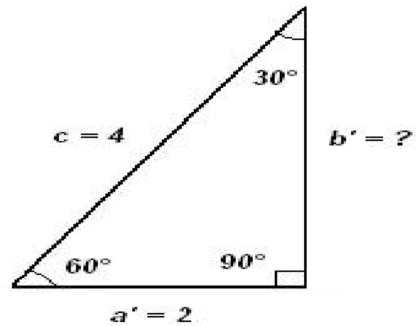
$$\frac{2}{0.5} = \frac{b'}{0.866}$$

$$4 = \frac{b'}{0.866}$$

$b' = (4)(0.866)$

Entonces el valor de la altura es: $b' = 3.464$

</td>
<td>



APLICANDO EL TEOREMA DE PITAGORAS

$4^2 = 2^2 + (b')^2$

$(b')^2 = 4^2 - 2^2$

$b' = \sqrt{12}$

Así, tenemos que: $b' = 3.464$ Vemos que el resultado de ambos métodos coincide.

</td>
</tr>
</table>

Ejemplo. Apliquemos el método para la resolución del triángulo siguiente:

<table>
<tr>
<td>

Puedes en tu cuaderno trazar una línea de 5cm. Del inicio de ésta, y a 45°, traza otra línea que le llamaremos **c**. En su otro extremo y a 120° traza la línea **b** que quedará desconocida en su magnitud. Estas líneas se cruzarán en un punto que representaremos como **A.**

El ángulo en este vértice A, se puede calcular aplicando el hecho que la suma de los ángulos en un triángulo es de 180°:

$A + 45° + 120° = 180°$

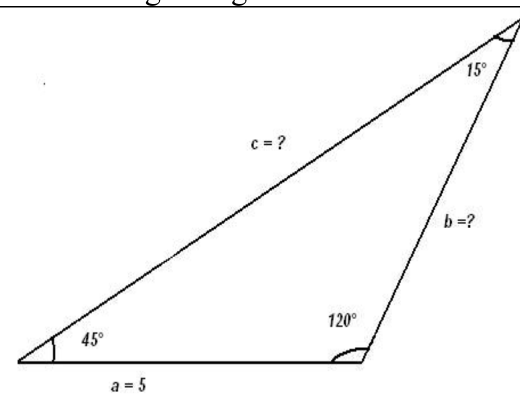
$A = 180° - 45° - 120° = 15°$ y aplicando la ley de senos:

$$\frac{b}{sen(45°)} = \frac{c}{sen(120°)}$$ y entonces

$$b = \frac{(12)(sen45°)}{sen120°} = \frac{(12)(0..7071)}{(0.866)} =$$

tenemos que: $b = 9.79$

</td>
<td>



Aplicando el mismo método, te pedimos que determines el valor que tendrá el lado **c y con ello quede resuelto el triángulo.**

</td>
</tr>
</table>

IMPORTANTE. La fórmula de la ley de senos nos permite ver un resultado importante, que te presentamos con la siguiente frase: "A un ángulo mayor se le antepone un lado mayor". En los ejemplos anteriores puede ver que el mayor de los ángulos, en cada caso, tiene frente a él al mayor lado. En el último ejemplo el mayor ángulo es 120° y frente a él tiene al lado **c,** que es el mayor de los lados. De la misma manera en el ejemplo, del triángulo rectángulo, el mayor lado es **c = 4** y está frente al ángulo de 90° que es el mayor de los ángulos de ese triángulo. Esta propiedad de los triángulos es importante que la tengas en cuenta para que, al momento de resolver triángulos, esperes resultados adecuados; sin duda esto te dará mas idea sobre si lo que estás haciendo es correcto.

Ejemplo. Encontrar los elementos que hacen falta conocer en el siguiente triángulo oblicuángulo.

Importante. Para darle solución deberás observar el triángulo y encontrar una pareja "**lado y ángulo que sean opuestos**". De aquí puedes partir para involucrar a otro elemento y con ello encontrar su "**pareja opuesta".**

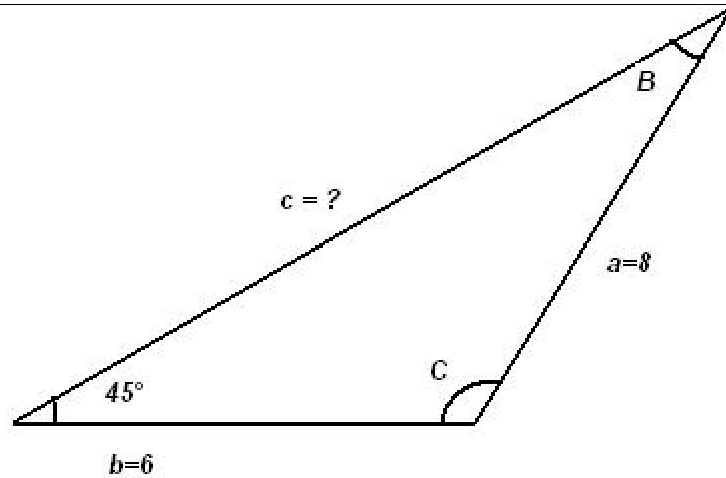
Es el caso del lado **a** y el ángulo de 45° que son opuestos. Involucremos con ellos al lado **b:**

$$\frac{8}{sen(45°)} = \frac{6}{sne(B)}$$

Despejando tenemos la expresión:

$$sen(B) = \frac{6sen(45°)}{8} = \frac{(6)(0.7071)}{8}$$

Ejecutando las operaciones tenemos: $sen(B) = 0.5303$ y aplicando el inverso: $B = sen^{-1}(0.5303)$ y finalmente, utilizando tu calculadora: $B = 32.02°$



RETO. Te invitamos a que sigas la técnica y encuentres el valor de la pareja **"lado c y ángulo C".**

LEYES DE COSENOS.

INTRODUCCIÓN. Esta ley te la presentamos como una herramienta para la resolución de triángulos oblicuángulos. Es una forma alterna, en ocasiones, para resolver un triángulo en lugar de la ley de senos; verás que en algunas ocasiones es la única manera de abordar el problema de encontrar los valores desconocidos de un triángulo oblicuángulo.
En esta ocasión cambiaremos la manera de presentar las cosas y haremos primero un análisis para descomponer este triángulo oblicuángulo en un par de triángulos rectángulos y al aplicar consecutivamente el teorema de Pitágoras podremos conocer la fórmula que nos representa a la ley de cosenos.

Análisis. En la figura tenemos un triángulo oblicuángulo de lados **a, b y c y** un ángulo θ conocido. Si trazamos la altura del triángulo lo dividiremos en dos triángulos rectángulos, uno de base **p** y el otro de base **c-p**. Está altura h la podemos calcular, con el teorema de Pitágoras, aplicándolo el teorema a los dos triángulos rectángulos:

- Aplicando el teorema al triángulo derecho:

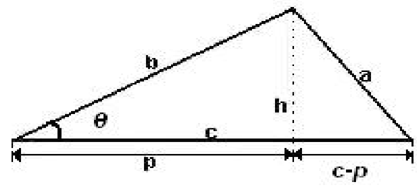
$$h^2 = a^2 - (c-p)^2$$
$$h^2 = a^2 - (c^2 - 2cp + p^2)$$
$$h^2 = a^2 - c^2 + 2cp - p^2$$

- Aplicando el teorema al triángulo izquierdo:

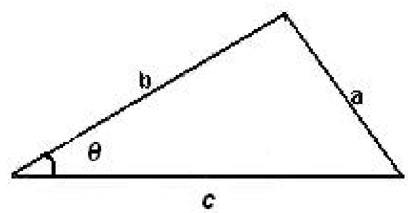
$$h^2 = b^2 - p^2$$

Igualando estas dos fórmulas de la altura tenemos:
$$b^2 - p^2 = a^2 - c^2 + 2cp - p^2$$
Simplificando la ecuación tenemos:
$b^2 = a^2 - c^2 + 2cp$ y, revisando el triángulo de la izquierda, podemos ver la relación siguiente: $p = b\cos(\theta)$ que sustituyéndola en la última ecuación tenemos finalmente la expresión que representa :

La Ley de Cosenos
$$b^2 = a^2 - c^2 + (2cb)\cos(\theta)$$



La Ley de Cosenos
$$b^2 = a^2 - c^2 + (2cb)\cos(\theta)$$



Tenemos aquí un triángulo oblicuángulo y la fórmula de la ley de cosenos. Si la despejamos de la siguiente manera:

$$b^2 + c^2 - 2cb\cos(\theta) = a^2$$

tendríamos una expresión que nos permitiría conocer a un lado desconocido **a** cuando tengamos conocidos los lados **b** y **c** y el ángulo θ formado por estos lados.

Nota. La formula de la ley de cosenos tiene variantes y, bajo análisis semejante al que se hizo en esta ocasión se pueden obtener estas variantes; presentamos enseguida estas variantes:

Incluimos la ecuación ya obtenida.

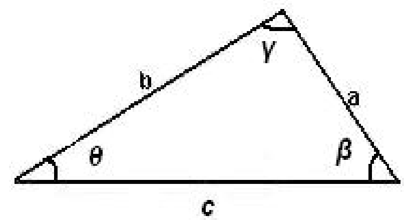
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos(\theta)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

IMPORTANTE.

Observa que en cada caso, si deseas conocer un lado tendrás que conocer los otros dos lados y el ángulo formado por estos últimos (por supuesto este ángulo queda opuesto al lado desconocido).



IMPORTANTE. Si tienes los tres lados conocidos, incluso con ningún ángulo conocido, podrás encontrar el ángulo deseado usando la fórmula adecuada, simplemente despejando.

Ejemplo.

$$\cos(\theta) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb}$$

Ejemplo. Determina la magnitud del ángulo B en el triángulo oblicuángulo siguiente:

Dado que queremos encontrar B, observamos en las ecuaciones de esta ley, que el lado opuesto b, determina la fórmula que se debe usar, es decir la segunda ecuación:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$ y despajándola tenemos:

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

y haciendo las sustituciones tenemos:

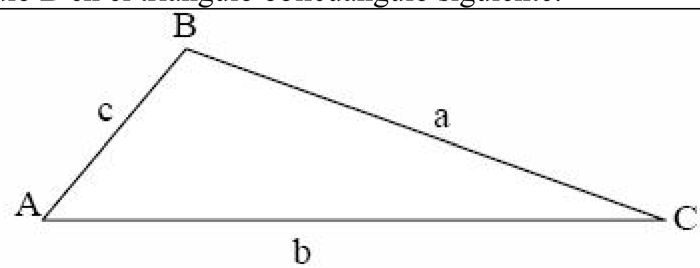
$$\cos(B) = \frac{(11.5)^2 + (15)^2 - (10)^2}{2(11.5)(15)}$$

$$\cos(B) = \frac{132.25 + 225 - 100}{345} = 0.7456$$

Aplicando funciones inversas en tu calculadora tenemos:

$B = \cos^{-1}(0.7456)$ y por tanto el ángulo buscado es:

$$B = 41.78°$$



$a = 11.5$

$b = 10$

$c = 15$

Ejercicios. Tomando como base la figura del ejemplo, únicamente la figura, resuelve los siguientes triángulos.

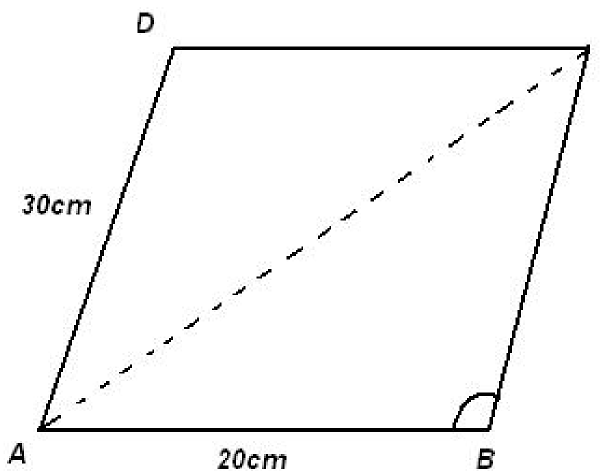
1) Siendo a = 74.56, b = 75 y c = 50, encuentra la suma de los ángulos A y C.

    a) 39.10°
    b) 70.97°
    c) 110.67°
    d) 69.93°

2) Si conocemos a = 33, b = 21 y C = 81°, determina el valor del ángulo B.

    a) 55.08°
    b) 99°
    c) 34.92°
    d) 64.08°

3) El paralelogramo siguiente mide 20cm y 30cm. Si uno de sus ángulos mide 79°, ver la figura, determina la magnitud de la diagonal.

Soluciones posibles: a) 32.72 b) 2.75 c) 37.54 d) 48.93	

4) En cada uno de los ejercicios anteriores busca la posibilidad de resolver cada uno de los ejemplos por las dos leyes, la de Senos y la de Cosenos.